ラグランジェ法による等間隔分割点内挿－LAIN

プログラム **LAIN**（**La**grangean **In**terpolation）は，与えられた等間隔データを，ラグランジェの４点法によって，等間隔分割点で内挿するサブルーチン副プログラムである．

このサブルーチンの適用は，データが軸上の等間隔な点で与えられている場合に限定されているので，そうでない場合は，与えられたデータが，等間隔データになるよう，いったん軸を変換しなければならない．［使用例２］は，そのような場合の応用例である．

LAIN（ラグランジェ法による等間隔分割点内挿）

【目　的】

与えられた等間隔データを，ラグランジェの４点法により，等間隔分割点で内挿する．

【使用法】

(1) 接続方法

CALL LAIN（DX，NN，A，ND1，AA，ND2，NDIV）

引　数	型	プログラムを呼ぶときの内容	プログラムから戻ったときの内容
DX	R	与えられたデータの間隔	内挿されたデータの間隔
NN	I	与えられたデータの個数	内挿されたデータの個数
A	R 1次元配列 （ND1）	与えられた等間隔データ	不　変
ND1	I	配列 A の整合寸法	不　変
AA	R 1次元配列 （ND2）	何も入れなくてよい	内挿された等間隔データ
ND2	I	配列 AA の整合寸法	不　変
NDIV	I	分割数　　NDIV≦20	不　変

(2) 必要なサブルーチンおよび関数副プログラム

ない

(3) 注意事項

i）整合寸法$ND2$は　$ND2 \geqq (NN\text{-}1) \times NDIV + 1$ でなければならない．

ii）内挿によりデータの最大値が変化するので，要すれば補正する．

【計算法】

ラグランジェの内挿公式によれば，$n+1$個の点 $x = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}$ において，それぞれ値 $g(x_k)$（$k = 1, 2, 3, \cdots, n+1$）が与えられた関数 $g(x)$ は，次に示す n 次の多項式 $f(x)$ によって近似できる．

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} g(x_k) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{n+1})} \tag{a}$$

（ａ）式の右辺は，x に関して n 次の多項式である．また $x = x_k$ ならば $f(x_k) = g(x_k)$ となるから，関数 $f(x)$ が，$x = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}$ において，関数 $g(x)$ と一致し，関数 $g(x)$ の値が与えられた $n+1$ 個の点を通過する．

いま，（ａ）式において $n=3$ とする，すなわち４点で関数 $g(x)$ の値を与える４点法を用いれば，（ａ）式は

$$\begin{aligned} f(x) = {} & g(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\ & + g(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ & + g(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\ & + g(x_4)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \end{aligned} \tag{b}$$

となる．さらに x_1, x_2, x_3, x_4 は等間隔 Δx を有するとして

$$x_1 = -\Delta x, \ x_2 = 0, \ x_3 = \Delta x, \ x_4 = 2\Delta x$$

とおき，これを（ｂ）式に代入すれば

$$\begin{aligned} f(x) = {} & g(x_1)\frac{(x-0)(x-\Delta x)(x-2\Delta x)}{(-\Delta x)(-2\Delta x)(-3\Delta x)} \\ & + g(x_2)\frac{(x+\Delta x)(x-\Delta x)(x-2\Delta x)}{(\Delta x)(-\Delta x)(-2\Delta x)} \\ & + g(x_3)\frac{(x+\Delta x)(x-0)(x-2\Delta x)}{(2\Delta x)(\Delta x)(-\Delta x)} \\ & + g(x_4)\frac{(x+\Delta x)(x-0)(x-\Delta x)}{(3\Delta x)(2\Delta x)(\Delta x)} \end{aligned} \tag{c}$$

と表わされる．

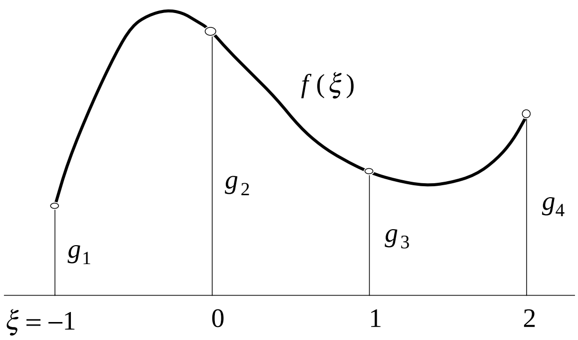
ここで次図のように $\xi = x/\Delta x$ とおき，$g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)$ を g_1, g_2, g_3, g_4 と書くことにすれば，（ｃ）式は

$$f(\xi) = c_1(\xi) g_1 + c_2(\xi) g_2 + c_3(\xi) g_3 + c_4(\xi) g_4 \tag{d}$$

ここに

$$
\left.\begin{aligned}
c_1 &= \frac{(\xi-0)(\xi-1)(\xi-2)}{(-1)(-2)(-3)} \\
c_2 &= \frac{(\xi+1)(\xi-1)(\xi-2)}{(+1)(-1)(-2)} \\
c_3 &= \frac{(\xi+1)(\xi-0)(\xi-2)}{(+2)(+1)(-1)} \\
c_4 &= \frac{(\xi+1)(\xi-0)(\xi-1)}{(+3)(+2)(+1)}
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{e})
$$

と表わすことができる.



与えられたデータの間隔 Δx を，等間隔に n_{div} 分割するものとすれば，まずプログラムの前半で，$\xi=-1$ と $\xi=2$ の間の $(3n_{\mathrm{div}}+1)$ 個の ξ について，（ｅ）式の計算を行う．次いで，順次 g_1, g_2, g_3, g_4 を，与えられたデータの引き続いた 4 個の値に等置して，$\xi=0$ ～1 間の n_{div} 個の点における（ｄ）式の $f(\xi)$ を計算する．この後半の計算を行うプログラムが，やや煩雑になっているのは，与えられたデータの最初および最後の区間における変則な内挿も，一まとめにして処理しているためである.

【プログラム】

```
C  * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
C     SUBROUTINE FOR LAGRANGE INTERPOLATION AT EQUI-DIVIDED POINTS
C  * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
C
C                                              CODED BY Y.OHSAKI
C
      SUBROUTINE LAIN(DX,NN,A,ND1,AA,ND2,NDIV)
C
      DIMENSION A(ND1),AA(ND2),XD(4),D(4),C(80,4),AD(4)
      DATA      XD/-1.,0.,1.,2./,D/-6.,2.,-2.,6./
C
      DIV=REAL(NDIV)
      I4=NDIV*3+1
      DO 130 I=1,I4
      X=REAL(I-NDIV-1)/DIV
      DO 120 J=1,4
      P=1.
      DO 110 K=1,4
      IF(K.EQ.J) GO TO 110
      P=P*(X-XD(K))
  110 CONTINUE
      C(I,J)=P/D(J)
  120 CONTINUE
  130 CONTINUE
      N=0
```

```
      IS=1
      IE=NDIV*2
      DO 170 M=2,NN-2
      DO 140 J=1,4
      AD(J)=A(M+J-2)
  140 CONTINUE
      DO 160 I=IS,IE
      AA1=0.
      DO 150 J=1,4
      AA1=AA1+AD(J)*C(I,J)
  150 CONTINUE
      N=N+1
      AA(N)=AA1
  160 CONTINUE
      IF(M.EQ.2) IS=NDIV+1
      IF(M.EQ.NN-3) IE=I4
  170 CONTINUE
      NN=N
      DX=DX/DIV
      RETURN
      END
```

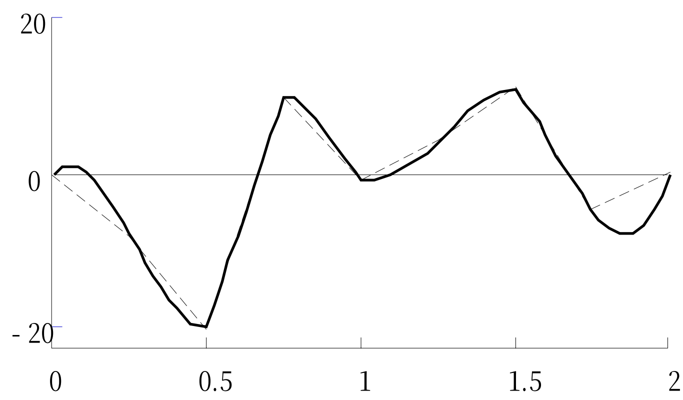
【使用例１】　データ・ファイル ND.03 から，等間隔データを読み取りを，間隔を10分割して内挿せよ.

［解］

プログラム：

```
      DIMENSION A1(9),A2(81)
      DATA      NDIV/10/
C
      READ(5,501) NN,DT,(A1(M),M=1,NN)
      CALL LAIN(DT,NN,A1,9,A2,81,NDIV)
      STOP
C
  501 FORMAT(T21,I5/T21,F5.0/9F5.0)
      END
```

アウトプット；結果は配列 $A2$ に格納されている．プロットすれば，次図のとおりで，破線が与えられたデータ，実線が内挿されたデータである．



【使用例２】　プログラムのDATA 文に与えられた８個のデータは，秒時点 $T_k = 8/k$（$k = 1, 2, L, 8$）で与えられたものとし，各時間間隔を３分割して内挿せよ.

［解］データの与えられた時点 T_k は等間隔ではないが，これの逆数 T_r をとれば，間隔 1/8 の等間隔データとなる．したがって，このような変換を行って，サブルーチン LAIN による内挿を行い，その後で再び T_r の逆数をとって，時間を元に戻せばよい．

プログラム：

```
      DIMENSION A(8),AA(22),T(22)
      DATA      NN/8/,A/5.,32.,38.,-33.,-28.,-10.,6.,0./,NDIV/3/
C
      DT=1./REAL(NN)
      DT1=DT
      CALL LAIN(DT,NN,A,8,AA,22,NDIV)
      DO 110 K=1,NN
      TR=REAL(K-1)*DT+DT1
      T(K)=1./TR
  110 CONTINUE
      STOP
      END
```

アウトプット：　結果は，配列 T に格納された時間ごとに，配列 AA 中のデータによって表わされる．プロットすれば下図のとおりで，陰線と○印が与えられたデータ，太線が内挿されたデータであって，横軸は対数目盛にしてある．